弱化を除いた線形論理の決定不能性

鈴木 潤（Jun Suzuki）

北海道大学

本発表では，古典命題線形論理および直観主義命題線形論理から弱化という規則を除いた体系が Turing 機械と同等な計算モデルをシミュレートでき，したがって任意の論理式について証明可能か否かを判定するアルゴリズムを持たないことを示す．すなわち弱化を除いた線形論理は決定不能である．弱化を除かない通常の古典命題線形論理が決定不能であることはすでに知られている（Lincoln et al. [5, 定理 3.7]．直観主義命題線形論理が決定不能であることもここから従う）．弱化を除くことは，決定不能という性質を変えずに保つというのが本発表の主張である．

古典論理や直観主義論理は構造規則と総称される弱化・縮約という規則を持っているが，線形論理ではこれらの規則が制限される．この制限により，線形論理は計算における資源の消費を表現できる．このとき弱化は資源の廃棄を，縮約は資源のコピーを表すと解釈できるが，様相記号 “!” の付いた論理式は弱化と縮約が制限なしに適用できる．したがって “!” の付いた論理式は，コピーと廃棄を自由に行えるような資源を表す．本発表で導入する線形論理体系は，弱化を制限するにとどまらず完全に取り除き，様相記号が付いた論理式に対しても適用できないこととする．これによって “!” は「コピーはできるが廃棄はできない」資源を表すようになる．決定不能性は，こうした体系が計算モデルとして十分に強い表現力を持っていることを意味する．

決定可能性と構造規則との関係は様々に研究されてきた．例えば，古典命題線形論理から弱化の制限をなくしすべての論理式に弱化の適用を認めた体系は決定可能となり（Kopylov [3, 定理 3]），縮約の制限をなくした体系も同様に決定可能となる（Okada-Terui [7, 系 1]），といった結果がある．また反対に構造規則の制限を強めた場合の決定可能性も研究されている（Kanovich et al. [2, 第 7 節]）．しかし，弱化のみを完全に取り除くという制限が決定可能性にどのように影響を与えるかはまだ調べられていなかった．本発表はこの点に「決定不能」という回答を与える．

線形論理の決定不能性の証明は一般に以下のような手法による．まず，2 カウンタ機械という計算モデルを考える．2 カウンタ機械の計算能力は Turing 機械と同等であることが示されており（Minsky [6, 定理 Ia]），入力を受理するか否かが決定不能であるような 2 カウンタ機械が作れる．重要なのは，2 カウンタ機械の入力をもとに古典命題線形論理のシークエントを上手く取れば，入力を 2 カウンタ機械が受理することとそのシークエントが証明可能であることが同値になるという点である．これにより，2 カウンタ機械の決定不能性から古典命題線形論理の決定不能性が言える．本発表で論ずるように，弱化を除いた体系についても同様の同値性から決定不能性が言える．

Lincoln et al. [5]はカット除去定理を応用した証明論的な議論によって古典命題線形論理についてこうした同値性を示しているが，本発表では Lafont [4]が行った意味論的

な議論による決定不能性の証明に着目する．同論文は線形論理の代数的意味論である相意味論（phase semantics）を用いている．2 カウンタ機械から適切な相意味論のモデルを定義し，これと健全性定理をあわせることで，先述の同値性と同様なことが示される．この手法には，Lincoln et al. [5]の証明論的な議論にあった煩雑さが軽減されるという利点がある．本発表ではこの Lafont [4]の証明を拡張することによって，弱化を除いた古典命題線形論理および直観主義命題線形論理の決定不能性を示す．

なお，近年 Bimbó-Dunn [1]は，古典命題線形論理（および直観主義命題線形論理）は決定可能であり，Lincoln et al. [5]の証明には瑕疵があると主張している．本発表ではこの主張についても簡単に触れる．

参考文献

[1] Katalin Bimbó and J Michael Dunn. Modalities in lattice-R. *Relevance Logics and other Tools for Reasoning. Essays in Honor of J. Michael Dunn*, pp. 89–127, 2022.

[2] Max Kanovich, Stepan Kuznetsov, Vivek Nigam, and Andre Scedrov Subexponentials in non-commutative linear logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, Vol. 29, No. 8, pp. 1217–1249, 2019.

[3] Alexei Kopylov. Decidability of linear affine logic. In *Proceedings of Tenth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pp. 496–504, 1995.

[4] Yves Lafont. The undecidability of second order linear logic without exponentials. *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 61, pp. 541–548, 1996.

[5] Patrick Lincoln, John Mitchell, Andre Scedrov, and Natarajan Shankar. Decision problems for propositional linear logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, Vol. 56, pp. 239–311, 1992.

[6] Marvin L. Minsky. Recursive unsolvability of Post's problem of "tag" and other topics in theory of Turing machines. *Annals of Mathematics*, 2nd Ser, Vol. 74, pp. 437–455, 1961.

[7] Mitsuhiro Okada and Kazushige Terui. The finite model property for various fragments of intuitionistic linear logic. *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 64, No. 2, pp. 790–802, 1999.